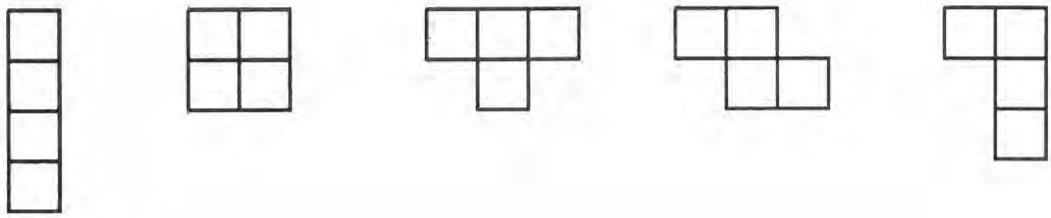
יחידה שלישית (שיעורים 14-12)

חושבים בבית

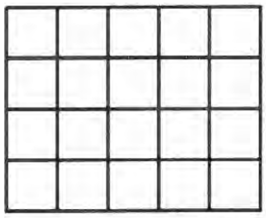
חידת החלקים הגזורים

נשרטט את מצב המוצא המצוי - כלומר, את לוח השחמט הגזור, לעומת המצב הסופי או הרצוי - כלומר, לוח השחמט השלם.

מצב מצוי:



מצב רצוי:



אפשר, כמובן, לנסות לבנות את המלבן השלם מהחלקים הגזורים בדרך של ניסוי וטעייה, אבל מספר האפשרויות אינו מועט והתהליך עלול לארוך זמן רב למדי. ואנחנו הרי מחפשים דרך שתאפשר לנו להגיע לפתרון במהירות.

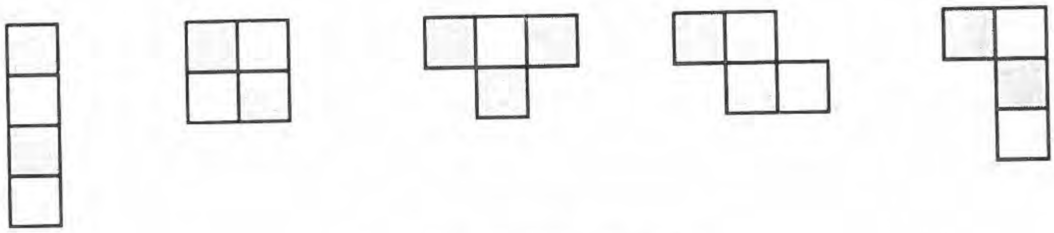
בחידת לוח השחמט הקודמת ראינו שצביעת הלוח בשחור ולבן סייעה לנו במציאת פתרון מהיר, מאחר שהחידה התבססה על קוביות דומינו = חלקים המכילים מספר זוגי של משבצות. ננסה זאת גם כאן.

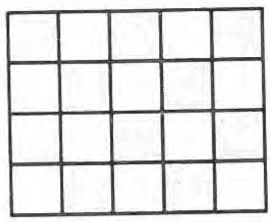
מושג המפתח כאן הוא המושג "זוגיות" - שחור־לבן בדוגמה שלנו. אבן הדומינו הצבועה שחור־לבן היא המחשה של השימוש במושג זוגיות.

שלב א: ייצוג גרפי -

נצבע גם את החלקים וגם את הלוח בזוגות של שחור־לבן.

שלב ב: בדיקה -





1. בחלקים הגזורים יש 9 משבצות לבנות ו־11 משבצות שחורות.
2. בלוח יש 10 משבצות שחורות ו־10 משבצות לבנות.

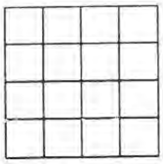
שלב ג: מסקנה -

יונתן צדק - החלקים הבודדים לא נגזרו מהלוח של מוטי!

רואים מכיוונים שונים

חידת הריבועים

במבט ראשון רואים מיד 16 ריבועים קטנים:



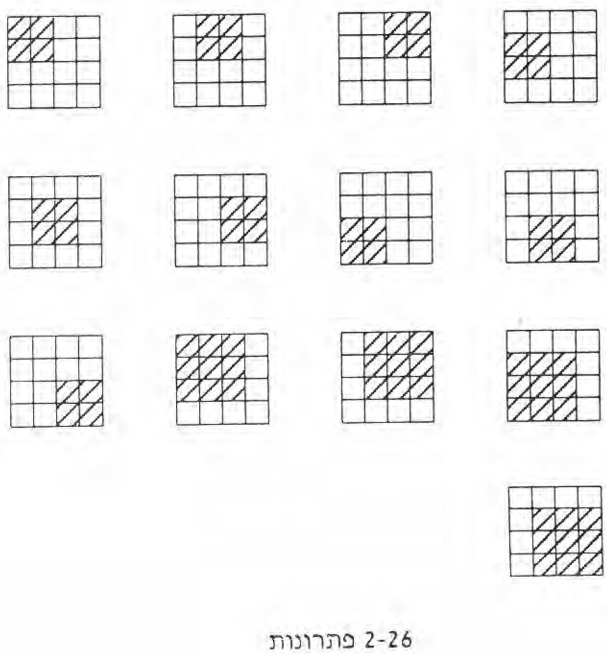
במבט שני מגלים גם את הריבוע הגדול, הכולל בתוכו את 16 הריבועים:

כלומר, עד כאן גילינו בסך הכול 17 ריבועים.

ואולם אם נשוב ונתבונן בשרטוט נראה כי מסתתרים בו ריבועים נוספים שגודלם שונה מהגדלים של הריבועים שציינו לעיל.

בעצם כל צירוף של כמה ריבועים קטנים, במספר זהה של ריבועים לכל לצלע ובמסגרת הריבוע הגדול - ייתן לנו ריבוע. במלים אחרות, בין הריבועים בעלי הצלע הקטנה ביותר (ריבוע אחד) ובין הריבוע בעל הצלע הגדולה ביותר (בת 4 ריבועים) - יש עוד כמה ריבועים בעלי צלע בת 2 ריבועים, ועוד כמה ריבועים בעלי צלע בת 3 ריבועים.

התבוננות מדוקדקת מגלה כאן את כל הריבועים שלהלן:



לפיכך יש כאן:

1 ריבוע גדול שצלעו 4 משבצות;

4 ריבועים שצלעם 3 משבצות;

9 ריבועים שצלעם 2 משבצות;

16 ריבועים שצלעם 1 משבצות;

ובסך הכול - 30 ריבועים.

שוברים ת'ראש

חידת כדורי הפינג־פונג

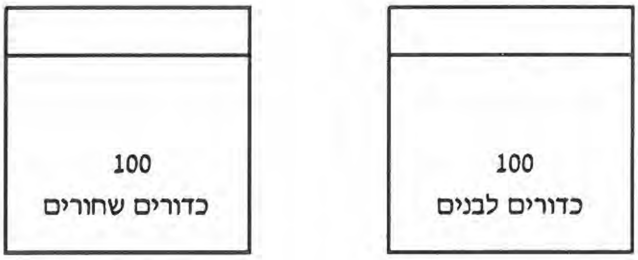
אם נפרט כל שלב ושלב מבחינה מספרית ייתכן שנגיע לתוצאה המדויקת - זאת, כמובן, אם לא נטעה במספרים ובאפשרויות.

השאלה היא - האם חישוב מסוג זה נחוץ בכלל לפתרון הבעיה?

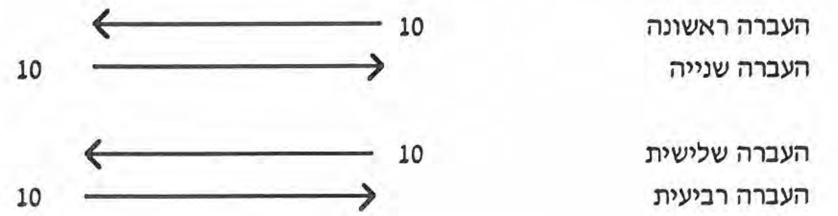
אפשר לפתור את הבעיה בדרך הרבה יותר אלגנטית, באמצעות ניתוח מצב.

שלב א: נתחיל בייצוג גרפי של מצבי הבעיה -

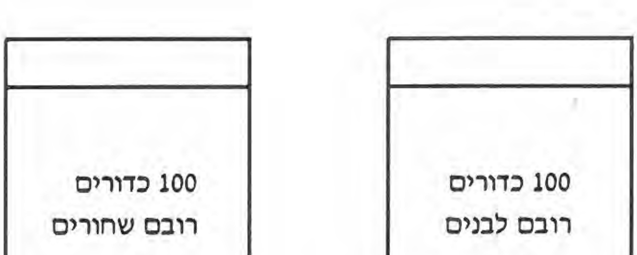
1. **מצב מוצא:**



2. **העברות ממכל למכל:**



3. **מצב סופי:**



שלב ב: בדיקה -
לאחר העברה הראשונה היו במכל השחורים 90 כדורים ובמכל הלבנים 110 כדורים, אבל לאחר ההעברה השנייה - נקרא לה כאן **"ההעברה המשלימה"** - מספר הכדורים בכל מכל חזר להיות כפי שהיה בתחילה: 100 כדורים, שכן למכל שנלקחו ממנו הכדורים הלבנים הוחזרו מהמכל האחר 10 כדורים הממלאים את מקומם; לאחר ההעברה השלישית היה שוב מצב דומה למצב שלאחר ההעברה הראשונה (110 לעומת 90), ש"תוקן" בהעברה הרביעית (דהיינו, **"ההעברה המשלימה"** השנייה), ושוב יש 100 כדורים בכל מכל.

שלב ג: מסקנה -
לאחר ההעברה השנייה ולאחר ההעברה הרביעית מספר הכדורים השחורים שבמכל הלבנים שווה למספר הכדורים הלבנים שבמכל השחורים; זאת משום שהכדורים השחורים החסרים במכל השחורים מצויים עתה במכל של הלבנים ולהיפך, את מקומם של הכדורים הלבנים שהוצאנו מהמיכל שלהם תופסים הכדורים השחורים - במספר זהה.

הדבר החשוב הוא שאחרי כל העברה ממכל הלבנים למכל השחורים הייתה גם העברה משלימה ממכל השחורים למכל הלבנים, כך שכמות הכדורים (הלבנים והשחורים) בשני המכלים נשארה תמיד שווה.

למעשה אנחנו יכולים להמשיך ולהעביר כדורים ממכל למכל עד אין סוף - בתנאי שאחרי כל העברה נקפיד תמיד לבצע גם **העברה משלימה**, כלומר, להחזיר למכל האחד את הכמות שהעברנו ממנו למכל האחר ולהיפך. כך נגיע תמיד לשוויון, משום שתמיד את מקום הכדורים בצבע אחד ישלימו כדורים מן הצבע האחר, ותמיד יהיו בכל מכל 100 כדורים.

חושבים אחרת

חידת הסיגים

ראשית, חשוב לזכור כי בבואנו להסתייע בננסים, הפתרונות המוצעים יכולים להיות רבים ומגוונים. גם אם במציאות יתקבל ויבוצע באופן מעשי פתרון אחד, פתרונות אחרים אפשריים ואולי אף יכולים לפתור את הבעיה בצורה טובה יותר.

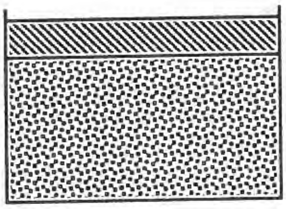
ריבוי האפשרויות נובע מן העובדה שאנו מאפיינים את הננסים באופן כללי:

- **תחילה אנו מגדירים את המשימה שהננסים נדרשים לבצע**
- **אחר־כך אנו קובעים היכן יפעלו ובאיזה אופן**
- **ולבסוף אנו קובעים מאיזה חומר יהיו עשויים בהתאם לדרישות התפקודיות, דהיינו, הדרישות הנובעות מהגדרת התפקיד.**

מאחר שלכל שלב מהשלבים האלה יכולים להיות אפיונים שונים, הרי ברור שיכול להיות מספר רב ולכאורה אפילו אין־סופי של פתרונות.

נבחן עתה כמה פתרונות שהוצעו לגבי בעיית הסיגים.

שרטוט 1:
מצב התחלתי



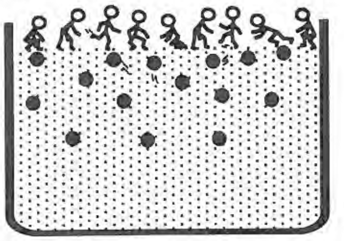
שכבת הסיגים העליונה מתמצקת עקב התקררות, ואילו אנו רוצים סיגים במצב נוזלי בכל נפח הקרון; לפיכך אפשר לחשוב על: (א) פתרונות שימנעו את התקררות הסיגים; (ב) פתרונות שישיבו את הסיגים המוצקים למצב נוזלי.

נקרא אפוא לננסים. ניעזר לשם כך בדף ההנחיה ל"קריאה לננסים".

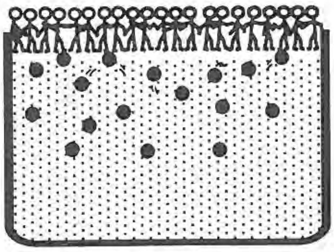
שלב ראשון - דוגמאות לפתרונות שמונעים התקררות:

אם אנו מצפים שהננסים ימנעו מעבר של חום מהסיגים לסביבה אפשר לתאר זאת כך (החום מתואר בצורת כדורים נעים):

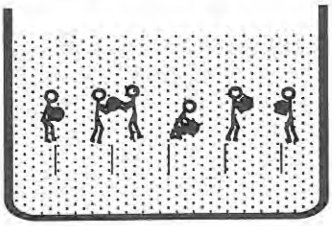
1. הננסים מונעים את מעבר החום מהסיגים לאוויר, כשהם פועלים **על פני** השכבה העליונה של הסיגים, כלומר, בין הסיגים לאוויר, והם עוצרים את כדורי החום בידיהם, ברגליהם ובגופם, כך שלא יצאו החוצה (כזכור, את החומר שממנו עשויים הננסים בוחרים אחר־כך, בהתאם לדרישות התפקודיות של כל פתרון ופתרון).



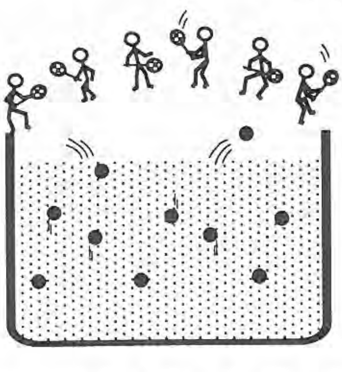
2. הננסים נמצאים בשכבת האוויר **שמעל** הסיגים, והם מונעים את בריחת כדורי החום באמצעות חומה צפופה שהם יוצרים בגופם. כדורי החום נתקלים בחומה וחוזרים לסיגים, כך הסיגים אינם מתקררים.



3. הננסים מונעים את מעבר החום מהסיגים לאוויר כשהם פועלים **בתוך** הסיגים, והם לוכדים את כדורי החום שרוצים לצאת ומחזירים אותם פנימה, או מחזיקים אותם בחזקה ולא מאפשרים להם לצאת.



4. הננסים נמצאים באוויר **שמעל** הסיגים ואינם מונעים את בריחת החום, אלא מחזירים לסיגים את כדורי החום שברחו מהם באמצעות "רקטות טניס".



5. הננסים נמצאים בשכבת האוויר **שמעל** לסיגים ואינם מונעים את בריחת החום, אלא רודפים אחר כדורי החום, תופסים אותם ומחזירים אותם לסיגים ועוד.

שלב שני - לאחר שנקבע את מקום פעולת הננסים ואת אורח תפקודם, נבדוק את החומרים המתאימים לביצוע. זה הזמן להגדיר את הדרישות הפיזיקליות מן הננסים:

נאמר שהחלטנו שהננסים צריכים למנוע מעבר חום. לפיכך:

1. כמוצקים ← הם צריכים להיות בעלי הולכת חום* גרועה.
2. כנוזלים ← הם צריכים להיות בעלי הולכה והסעת חום** גרועות.
3. כגזים ← הם צריכים להיות בעלי הולכה והסעת חום גרועות.

נניח, לדוגמה, שנבחר את התיאור הראשון: הננסים - הרבה מאוד ננסים - נמצאים מעל הסיגים ומונעים מהחום (הכדורים) לברוח לאוויר באמצעות רגליהם, ידיהם וגופם. אילו דרישות נדרוש מהננסים כדי שימלאו את תפקידם כהלכה על־פי התיאור הזה?

נניח עוד, שהחלטנו שהננסים צמודים לשכבה העליונה של הסיגים. כיצד זה אפשרי? אולי הם יצופו מעל הסיגים? ואם כן - כיצד? אילו חומרים צפים מעל נוזלים? מהן התכונות של חומר צף? אילו חומרים יכולים לצוף מעל הסיגים? מתברר מיד שעל־פי הפתרון הזה המשקל הסגולי*** של הננסים צריך להיות נמוך מזה של הסיגים.

מה עוד נדרוש מן הננסים שלנו?
אנו דורשים שהננסים לא "יזהמו" את הסיגים, שלא יקלקלו אותם ולא ייצרו - יחד אתם, או מהם - חומרים חדשים. כלומר, אם הננסים יהיו מוצקים, צריך שיהיה קל להפרידם מהסיגים; ואם הננסים יהיו נוזלים, צריך שלא יתערבבו עם הסיגים.

בעיה נוספת:
אם הננסים צפים מעל הסיגים - כיצד אפשר יהיה לפרוק את הסיגים בקלות?
כדי שלא יהיה קושי בשלב פריקת הסיגים אפשר להציע, למשל, שלוש אפשרויות:

1. שהננסים יהיו חומר נוזלי וקל להפרדה
2. שהננסים יהיו חומר מוצק שיתפורר או יותך בשעת הפריקה
3. שהסיגים יוכלו לחדור דרך הננסים, ולעבור דרכם בקלות.

* **הולכת חום** - מעבר חום בתוך החומר ללא שינוי במקום של חלקיקיו.
** **הסעת חום** - מעבר חום ע"י תנועת חלקיקיו החמים של החומר ממקום למקום.
*** **משקל סגולי** - משקלו היחסי של חומר מסוים לעומת משקל המים באותו נפח.

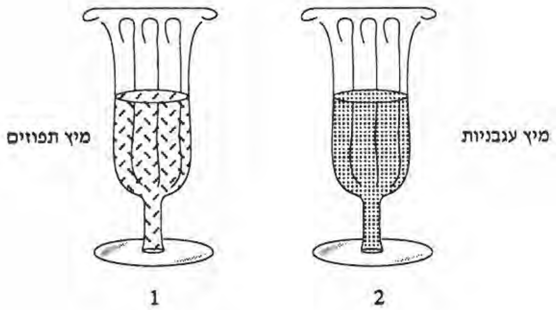
חושבים בבית

חידת מיץ העגבניות ומיץ התפוזים

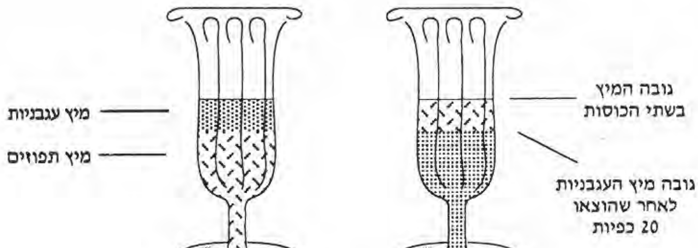
כמו בחידת הכדורים כך גם בחידה הזאת - אנחנו מעבירים כמויות שוות ממכל למכל. אבל בחידת הכדורים אפשר היה לראות בבירור את הכדורים הזרים בפח ואילו בחידה זו יש לכאורה גורם מקשה, והוא מהילת הנוזלים זה בזה: כשאנו מערבבים נוזל אחד באחר, שוב אין אנו יכולים להבחין ביניהם. בבדיקה מקרוב נראה שאין הדבר משנה לגבי פתרון החידה, שכן העיקרון שמעניין אותנו פה הוא עקרון **ההעברה המשלימה.**

נדגים את המצב ההתחלתי ואת המצב הסופי באמצעות שרטוטים:

מצב התחלתי:



מצב סופי:



בשרטוט אנו מתארים מצב דמיוני שבו מיץ העגבניות ומיץ התפוזים **אינם** מתערבבים זה בזה, כדי שנוכל לעקוב אחר כמות הנוזלים בנפרד בכל כוס.

הייצוג הגרפי מאפשר לנו לראות בבירור שגם בחידה זו הכמות של הנוזלים ה"זרים" שווה בשני המכלים. מאחר ששמוליק העביר מכוס לכוס כמויות שוות של נוזלים, ומאחר שלכל העברה מכוס א' לכוס ב' הייתה גם **העברה משלימה של אותה כמות בדיוק מכוס ב' לכוס א'** - במצב הסופי יהיה הגובה של הנוזלים (המעורבבים) בכל אחת מן הכוסות שווה לגובה שבו היו הנוזלים במצב ההתחלתי; ומכאן שכמות מיץ העגבניות הנמצאת במיץ התפוזים, שווה בדיוק לכמות מיץ התפוזים שנמצאת במיץ העגבניות. הכמות שחסרה בכוס האחת משום שהועברה לכוס האחרת - מתמלאת באמצעות כמות שווה שהועברה מהכוס

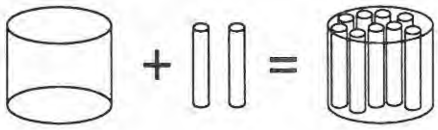
האחרת לכוס האחת. ההדגשה בנוסח החידה על ערבוב הכמויות מטעה, אפוא, משום שאיננה נחוצה להבנת העיקרון המבוסס על שוויון הכמויות עקב ההעברות המשלימות.

שימו לב: שוויון בכמויות של החומר ה"זר" בשני המכלים נשמר בתנאי שכל העברת נוזל מן המכל האחד למכל האחר מושלמת בפעולת גומלין - העברה משלימה של אותה כמות נוזל מן המכל האחר למכל האחד. כלומר: לצורך החידה סך כול פעולות ההעברה חייב תמיד להיות זוגי!

חידת מסנני הזכוכית

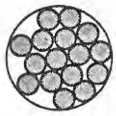
לפתרון החידה הזאת ניעזר בגישה של ראייה בהיפוך (צורת ה־E).

במקום לראות את המסנן כגליל זכוכית שנקדחו בו חורים - אפשר לראות אותו כמסגרת של גליל שמחברים אליה מוטות זכוכית עגולים בצורה זו:



כשמחברים את המוטות העגולים זה לזה נוצרים חללים. החללים האלה שבין המוטות הם חורי המסנן.

כך ייראה המסנן הזה במבט מלמעלה:



הפתרון: במקום לקדוח חורים בגליל חלול של זכוכית - מחברים מוטות זכוכית עגולים זה לזה ומקיפים אותם במסגרת. אכן, זה היה הפתרון בפועל והמפעל עמד בדרישות המזמין.