

## פיתוח חשיבה ספרותית (מתמטית)

מחקרים שנעשו לאחרונה גילו כי יש לנו הרבה "מוחות", ולא מוח אחד. לפרופ' Roger Sperry הוענק פרס נובל על עבודתו בנושא זה. הוא טען שמוח האדם מחולק לשתי אוונות, ימנית ושמאלית, שכל אחת מהן מטפלת בפונקציות שונות של החשיבה.

על-פי תיאוריה זו מתחלקת האחריות למיומנויות החשיבה בין האוונות, כך שהצד השמאלי אחראי לפונקציות הבאות: 1. לוגיקה, 2. חשיבה מילולית, 3. רשימות, 4. מספרים, 5. סדרות, 6. לינאריות (יחס ישר), 7. אנליזה (ניתוח). לעומת זאת הצד הימני אחראי ל: 1. קצב, 2. דמיון, 3. הזיות בהקיץ, 4. צבע, 5. מימדים, 6. מודעות מיוחדת, 7. גשטאלט (מודעות לתמונה בשלמותה, לשלם). פרופ' ספרי ועמיתיו טענו גם כי ככל שבני האדם משתמשים יותר בשני חלקי המוח, כן מתפתחים יותר שני חלקים אלו. למשל, הם גילו כי לימוד מוסיקה עוזר ללימוד מתמטיקה, וכי לימוד מתמטיקה עוזר ללימוד מוסיקה; כן גילו כי פיתוח הקצביות ופיתוח השפה קשורים בקשר דומה; שפיתוח מושגי המימדים עוזר ללימוד המתמטיקה וכי לימוד המתמטיקה עוזר לפיתוח מושגי המימד. כמו כן גילו כי ככל שרוב השימוש בפונקציות הבודדות כן גדלה יכולת החשיבה הכללית של האדם.

בהקשר זה כדאי להזכיר אנשי אשכולות כמו ליאונרדו דה-וינצ'י, בקמינסטר פולר ועוד. את עבודתו של פרופ' ספרי המשיך, בשנות ה-1980, פרופ' ערן זיידל, שהראה כי טווח המיומנויות שהמוח מטפל בהן מפולג הרבה יותר משחשבו בתחילה. הוא הראה כי לכל אחת משתי אוונות המוח יש יכולת כמוסה לטפל בכל הפונקציות של המוח. כך או כך, ללא קשר למקום במוח העוסק בפיתוח סוג חשיבה זה או אחר, החוקרים מאמינים כי ככל שמפתחים זוויות רבות יותר של החשיבה, כן מתפתחת יכולת החשיבה הכללית של האדם.

היכולת להכליל, כלומר, לתת משמעות לדברים שאותם רואים על-ידי מציאת כלל (חוק) המנסח את המשותף לקבוצת עצמים, או החוקיות שעל-פיה מתפתחת קבוצת עצמים, היא מיסודות החשיבה המופשטת. בחלקה הראשון של יחידה זו עסקנו בפיתוח יכולת זו ביחס לצורות, כלומר בפיתוח החשיבה הוויזואלית-צורנית. פיתוח יכולת ההכללה בתחום הספרתי-מתמטי לא זו בלבד שיתרום ליכולת המתמטית של הלומד, אלא גם יתרום ליכולת ההכללה הכללית שלו.

אנו ננסה לפתח את יכולת ההכללה המתמטית על-ידי טיפול בסדרות, מציאת החוק שעל-פיו הן משתנות, ומציאת יוצאי-דופן בתוך קבוצות של מספרים.

### דרך החשיבה

החשיבה הקשורה בהשלמת החסר בחידות הבאות כוללת שלושה שלבים:

1. התבוננות במספרים הנתונים, בנסיון לזהות האם קיים ביניהם קשר ומהו אותו קשר. הכיוון: משמאל לימין.
2. מיצוי הרעיון שביסוד החידה, ניסוח מדויק של הקשר, הנושא, החוק ובדיקת הקשר שנוסח ביחס למספרים הנתונים.
3. הפעלת החוק (יישום) כדי למצוא מהם המספרים החסרים.

## סדרות ספרתיות - השלם את החסר

\* בכל הסדרות הספרתיות, כיוון קריאת הנתונים הוא משמאל לימין.

נניח שמבקשים ממך לזכור את רשימת המספרים הבאה:

9, 5, 17, 11, 1, 15, 3, 19, 7.

במבט ראשון נראית המשימה קשה למדי.

במבט שני, אחרי שמתבוננים שוב במספרים, מגלים שאם מסדרים את המספרים לפי גודלם, מקבלים את הרשימה:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,

האם קל יותר לזכור את המספרים כאשר הם מסודרים?

קל לזכור רשימת מספרים אם מזהים איזו חוקיות המקשרת בין המספרים השונים ברשימה.

למשל, ברשימה ה"מסודרת" די קל לגלות שכל מספר גדול מהמספר שלשמאלו ב-2. לכן די שנזכור כי המספר הראשון הוא 1, וכי ההפרש בין כל שני מספרים עוקבים הוא 2, כדי שנוכל לחזור בקלות על הרשימה.

רשימת מספרים שבין המספרים העוקבים שבה יש חוקיות מסוימת נקראת סדרה. לכל אחד מהמספרים המרכיבים את הסדרה קוראים איבר.

**כאשר אין חוקיות בין רשימת מספרים - אין היא מהווה סדרה.**

אחרי שמגלים את החוקיות הקיימת בין איבריה העוקבים של רשימת מספרים, יש נטייה לצפות מה יהיה האיבר הבא באותה סדרה, מה יהיה האיבר שאחריו וכך הלאה. בשלב זה מעורבת חשיבה אינדוקטיבית - על-סמך הדוגמאות אותן בדקנו, אנו קובעים חוק כללי, וממנו מסיקים לגבי התנהגות של דוגמאות נוספות. זהו שלב הדורש זהירות רבה. לפני שעוברים לחיזוי האיבר הבא צריך לבדוק היטב האם כל האיברים הנתונים של הסדרה אכן מקיימים את החוקיות אותה "זיהינו".

כאשר סדרות המספרים הן פשוטות, קל לזהות את החוקיות של הסדרה, ולהמשיך אותה. כאשר החוקיות סבוכה יותר, דרושה מחשבה רבה כדי לגלות את החוקיות, אך תרגול ואימון מסייעים. ככל שהחוקיות סבוכה יותר, כן יש סיפוק רב יותר מזיהוי החוקיות המקשרת את האיברים העוקבים של הסדרה.

אנו נלמד כאן לזהות את כללי החוקיות של איברי סדרות רבות - מן הקל אל הכבד.

### סדרות חשבוניות

סדרות חשבוניות הן סדרות שבהן יש הפרש קבוע בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה. המספרים הטבעיים מהווים סדרה חשבונית, שבה ההפרש הקבוע בין כל שני איברים עוקבים הוא 1.

$$1, (+1) 2, (+1) 3, (+1) 4, (+1) 5, (+1) 6, (+1) 7, (+1) 8, \dots$$

נחש מה יהיה האיבר הבא? וזה שאחריו? בסוגריים תמצא רמז לחוקיות של הסדרה - הוסף 1 לאיבר - ותקבל את האיבר הבא.

בסדרה הבאה ההפרש הקבוע הוא 2. השלם את המספר (האיבר) הבא בסדרה, וזה שאחריו.

$$2, (+2) 4, (+2) 6, (+2) 8, (+2) 10, (+2) 12, (+2) 14, (+2) \dots, (+2) \dots$$

בסדרה הבאה ההפרש הקבוע הוא 3. השלם את המספר (האיבר) הבא בסדרה.

$$2, (+3) 5, (+3) 8, (+3) 11, (+3) 14, (+3) 17, (+3) 20, (+3) 23, \dots$$

בסדרה הבאה ההפרש הקבוע הוא -1 (יש לחסר 1). השלם את המספר (האיבר) הבא בסדרה.

$$20, (-1) 19, (-1) 18, (-1) 17, (-1) 16, (-1) 15, (-1) 14, (-1) \dots$$

בסדרה הבאה ההפרש הקבוע הוא -2 (יש לחסר 2). השלם את המספר (האיבר) הבא בסדרה.

$$20, (-1) 19, (-1) 18, (-1) 17, (-1) 16, (-1) 15, (-1) 14, (-1) \dots$$

בסדרה הבאה ההפרש הקבוע הוא -0.5. השלם את החסר (גם את ההפרש הקבוע בסוגריים).

$$2, ( ) 1.5, ( ) 1, ( ) 0.5, ( ) 0, ( ) -0.5, ( ) -1, ( ) \dots, ( ) \dots$$

## סדרות המבוססות על סדרות חשבוניות

לעתים נתקלים בסדרות שאינן סדרות חשבוניות, כלומר, ההפרש בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה אינו קבוע, אבל החוקיות בנויה על סדרה חשבונית. למשל, התבונן בסדרה הבאה ורשום את ההפרשים בין כל שני איברים עוקבים.

1, ( ) 2, ( ) 4, ( ) 7, ( ) 11, ( ) 16, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ...

1, (+1) 2, (+2) 4, (+3) 7, (+4) 11, (+5) 16, (+7) ..., (+8) ..., (+9) ...

ההפרשים אינם קבועים, אך התבוננות בהפרשים מראה שההפרשים עצמם מהווים סדרה חשבונית, שההפרש הקבוע בין איבריה העוקבים הוא 1. גם בסדרה הבאה ההפרשים בין האיברים העוקבים מהווים סדרה חשבונית. מה קורה עם ההפרשים בסדרה הבאה:

30, ( ) 28, ( ) 24, ( ) 18, ( ) 10, ( ) 0, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ...

30, (-2) 28, (-4) 24, (-6) 18, (-8) 10, (-10) 0, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ...

ומה יהיו האיברים הבאים?

האם תוכל, באמצעות רישום ההפרשים בין כל שני איברים עוקבים, לזהות את החוקיות בסדרה הבאה?

14, ( ) 15, ( ) 25, ( ) 26, ( ) 36, ( ) 37, ( ) 47, ( ) ..., ( ) ...,  
14, (+1) 15, (+10) 25, (+1) 26, (+10) 36, (+1) 37, (+10) 47, ( ) ..., ( )

התוספת מאיבר לאיבר היא לסירוגין: פעם +1, ופעם +10. אפשר גם להסתכל על סדרה זו כעל ערבוב של שתי סדרות (חשבוניות): האיברים הזוגיים מהווים סדרה אחת (מה הפרשה?) והאיברים האי-זוגיים מהווים סדרה שנייה.

נרשום את שתי הסדרות:

14, ( ) 25, ( ) 36, ( ) 47, ( ) ..., ( ) ..  
15, ( ) 26, ( ) 37, ( ) , ( ) ..., ( ) ..

### בחן את עצמך

בתרגילים 1-8 סדרות חשבוניות של מספרים (צריך להוסיף או לחסר מספר קבוע לאיבר כדי לקבל את האיבר הבא).

בין כל איבר לאיבר יש סוגריים. רשום בתוכם את החוק המעביר אותך מאיבר מסוים לאיבר הבא אחריו. השלם את האיברים הבאים בסדרה.

$$9, ( ) 15, ( ) 21, ( ) 27, ( ) 33, ( ) 39, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.1}$$

$$9, ( ) 14, ( ) 19, ( ) 24, ( ) 29, ( ) 34, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.2}$$

$$1, ( ) 11, ( ) 21, ( ) 31, ( ) 41, ( ) 51, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.3}$$

$$8, ( ) 6, ( ) 4, ( ) 2, ( ) 0, ( ) -2, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.4}$$

$$100, ( ) 98, ( ) 96, ( ) 94, ( ) 92, ( ) 90, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.5}$$

$$17, ( ) 20, ( ) 23, ( ) 26, ( ) 29, ( ) 32, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.6}$$

$$-15, ( ) -10, ( ) -5, ( ) 0, ( ) 5, ( ) 10, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.7}$$

$$0.11, ( ) 0.12, ( ) 0.13, ( ) 0.14, ( ) 0.15, ( ) 0.16, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.8}$$

בתרגילים 9-11 סדרות של מספרים שבהן החוק הקובע את המעבר בין איבר לאיבר שונה במקצת. בין כל איבר לאיבר יש סוגריים. רשום בתוכם את החוק המעביר אותך מאיבר אחד לאיבר הבא אחריו. רמז: שים לב להפרש בין איברים עוקבים.

השלם את האיברים הבאים בסדרה.

$$3, ( ) 4, ( ) 6, ( ) 9, ( ) 13, ( ) 18, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.9}$$

$$1, ( ) 11, ( ) 20, ( ) 28, ( ) 35, ( ) 41, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.10}$$

$$15, ( ) 25, ( ) 26, ( ) 36, ( ) 37, ( ) 47, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.11}$$

$$5, ( ) 7, ( ) 4, ( ) 6, ( ) 3, ( ) 5, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.12}$$

## סדרות הנדסיות, סדרות משולבות, וסדרת פיבונצ'י

סדרות **הנדסיות** הן סדרות שבהן יש מנה קבועה של כל שני איברים עוקבים של הסדרה. בסדרה שבה המנה הקבועה היא 2 יש לכפול ב-2 איבר מסויים כדי לקבל את האיבר הבא אחריו בסדרה.

דוגמה: חיידק מתחלק לשניים בכל שנייה. כלומר, מספר החיידקים בכל שנייה הוא כפול ממספרם בשנייה הקודמת; בשנייה 0 יש חיידק אחד. בשנייה 1 יש שני חיידקים (כופלים ב-2). בשנייה 2 יש 4 חיידקים (שוב כופלים ב-2), בשנייה 3 יש 8 חיידקים וכו'. רשום סדרה שתתאר את מספר החיידקים בכל שנייה.

על-מנת שלא לבלבל עם סימן הנקודה העשרונית, נסמן את הכפל ב- $x$  ואת החילוק ב- $1$

$$1, (x/2) 2, (x/2)^2 4, (x/2)^3 8, (x/2)^4 16, (x/2)^5 32, (x/2)^6 64, (x/2)^7 128, \dots, \dots, \dots$$

נחש מה יהיה האיבר הבא? וזה שאחריו? מה יהיה מספר החיידקים כעבור 8 שניות? 9 שניות?

$$1, (x/3) 3, (x/3)^2 9, (x/3)^3 27, (x/3)^4 81, (x/3)^5 243, (x/3)^6 \dots, (x/3)^7 \dots, (x/3)^8 \dots$$

נחש מה יהיה האיבר הבא? וזה שאחריו?

החוקיות בסדרה הבאה: כדי לקבל את האיבר הבא כופלים את האיבר האחרון ב-2 ומוסיפים למכפלה 1. השלם את המספר (האיבר) הבא בסדרה, וזה שאחריו.

$$2, (x+2) 5, (x+2)^2 11, (x+2)^3 23, (x+2)^4 47, (x+2)^5 95, ( ) \dots, ( ) \dots$$

הסדרה הבאה היא **סדרה משולבת**. אפשר להסתכל בה בשתי דרכים: איבריה מקיימים לסירוגין את חוקי הסדרה ההנדסית ואת חוקי הסדרה החשבונית: את האיברים האי-זוגיים כופלים ב-2, ולאיברים הזוגיים מוסיפים 3. השלם את האיבר הבא בסדרה.

$$2, (x2)4, (+3)7, (x2)14, (+3)17, (x2)34, (+3)37, (x2)74, (+3)\dots, (x2)\dots,$$

אבל אם מסתכלים רק על האיברים האי-זוגיים, או רק על האיברים הזוגיים, ורושמים את ההפרשים שבין האיברים העוקבים, מקבלים סדרות שכבר היכרנו קודם:

$$2, (+5)7, (+10)17, (+20)37, (+40)\dots, (+\dots)\dots,$$

סדרת ההפרשים היא עצמה סדרה הנדסית!

$$4, (+10)14, (+20)34, (+40)74, (+\dots)\dots, (+\dots)\dots,$$

סדרת **פיבונצ'י** היא סדרה שבה כל איבר הוא סכום שני איברי הסדרה שלפניו. (החל באיבר השלישי)

דוגמאות:

$$1, 2, (1+2) 3, (2+3) 5, (3+5) 8, (5+8) 13, (8+13) 21, (\dots) \dots, (\dots) \dots$$

$$1, 0, (1+0) 1, (0+1) 1, (1+1) 2, (1+2) 3, (2+3) 5, (\dots) \dots, (\dots) \dots$$

## בחן את עצמך

בתרגילים 1-12 סדרות של מספרים הדומות לסדרות עליהן דיברנו עד כה.  
בין כל איבר לאיבר יש סוגריים. רשום בתוכם את החוק המעביר אותן מאיבר מסוים לאיבר הבא אחריו.  
השלם את האיברים הבאים בסדרה.

$$5, ( ) 6, ( ) 8, ( ) 11, ( ) 15, ( ) 20, ( ) 26, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.1}$$

$$5, ( ) 6, ( ) 8, ( ) 9, ( ) 11, ( ) 12, ( ) 14, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.2}$$

$$4, ( ) 6, ( ) 5, ( ) 7, ( ) 6, ( ) 8, ( ) 7, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.3}$$

$$5, ( ) 2, ( ) 7, ( ) 9, ( ) 16, ( ) 25, ( ) 41, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.4}$$

$$2, ( ) 6, ( ) 10, ( ) 14, ( ) 18, ( ) 22, ( ) 26, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.5}$$

$$1, ( ) 6, ( ) 7, ( ) 17, ( ) 18, ( ) 33, ( ) 34, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.6}$$

$$1, ( ) 10, ( ) 100, ( ) 1000, ( ) 10000, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.7}$$

$$0.11, ( ) -0.12, ( ) 0.13, ( ) -0.14, ( ) 0.15, ( ) -0.16, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.8}$$

$$6, ( ) 7, ( ) 9, ( ) 12, ( ) 16, ( ) 21, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.9}$$

$$32, ( ) 27, ( ) 29, ( ) 24, ( ) 26, ( ) 21, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.10}$$

$$1, ( ) 3, ( ) 4, ( ) 12, ( ) 13, ( ) 39, ( ) 40, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.11}$$

$$34, ( ) 36, ( ) 18, ( ) 20, ( ) 10, ( ) 12, ( ) 6, ( ) \dots, ( ) \dots, \underline{.12}$$



### סדרות נוספות

לעתים מציאת החוק המקשר את איברי הסדרה קשה עד שמבחינים שיש לפנינו למעשה שתי סדרות, בדילוגים, ואיבריה של סדרה אחת מופיעים לסירוגין בין אברי הסדרה השנייה: לדוגמה, נתונה הסדרה:

$$5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, \dots, \dots, \dots, \dots$$

האיברים האי-זוגיים של סדרה זו מסומנים בקו-תחתית.

נתבונן באיברים האי-זוגיים של סדרה זו:

$$5, (+2) 7, (+3) 10, (+4) 14, ( ) , ( ) , \dots,$$

קל לראות שהתוספת גדלה ב-1 מאיבר לאיבר. (תחילה התוספת 2, אחר 3, 4 וכו').

נתבונן באיברים הזוגיים של סדרה זו:

$$6, (+2) 8, (+3) 11, (+4) \dots, ( ) , ( ) , \dots,$$

קל לראות שהתוספת גדלה ב-1 מאיבר לאיבר. (תחילה התוספת 2, אחר 3, 4 וכו').

האיברים החסרים הם: 15, 19, 20, 25, 26

מהי החוקיות בסדרה הבאה?

$$1, ( ) 4, ( ) 9, ( ) 16, ( ) 25, ( ) 36, ( ) 49, \dots, \dots, \dots$$

זו סדרת הריבועים (העלאה בחזקת 2) של המספרים הטבעיים.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \dots, \dots, \dots$$

אגב, בסדרה זו ההפרשים בין איברים עוקבים מהווים סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה

הוא 3, ההפרש שלה הוא 2.

$$8^2=64, 9^2=81, 10^2=100$$

האיברים החסרים הם:

ומהי החוקיות בסדרה הבאה?

$$2, 4, 16, 256, \dots$$

כל איבר בסדרה זו הוא ריבועו של האיבר הקודם לו: לאיבר הראשון אין קודם.

$$2, 2^2, 4^2, 16^2, 256^2, \dots$$

$$256^2=65536$$

האיבר החסר הוא

ומהי החוקיות בסדרה הבאה?

$$0, 3, 8, 15, 24, \dots$$

מקבלים סדרה זו כאשר מחסרים 1 מסדרת הריבועים של המספרים הטבעיים.

$$6^2-1=35$$

האיבר החסר הוא

### בחן את עצמך

בין כל איבר לאיבר יש סוגריים. רשום בתוכם את החוק המעביר אותך מאיבר מסוים לאיבר הבא אחריו. השלם את האיברים הבאים בסדרה.

- 8, ( ) 10, ( ) 14, ( ) 18, ( ) ..., ( ) 34, ( ) 50, ( ) 66, ( ) ..., .1
- 8, ( ) 12, ( ) 16, ( ) 24, ( ) 28, ( ) 32, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .2
- 6, ( ) 9, ( ) 18, ( ) 21, ( ) 42, ( ) 45, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .3
- 3, ( ) 5, ( ) 8, ( ) 13, ( ) 22, ( ) 39, ( ) ..., ( ) ..., .4
- 25, ( ) 20, ( ) 15, ( ) 10, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .5
- 8, ( ) 12, ( ) 10, ( ) 16, ( ) 12, ( ) 20, ( ) 14, ( ) ..., ( ) ..., .6
- ..., ( ) 8, ( ) 11, ( ) 15, ( ) 20, ( ) 26, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .7
- 5, ( ) 7, ( ) ..., ( ) 17, ( ) 25, ( ) ..., ( ) ..., .8
- 21, ( ) 17, ( ) 13, ( ) 9, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .9
- 1, ( ) 5, ( ) 13, ( ) 25, ( ) 41, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .10
- 2, ( ) 6, ( ) 18, ( ) 54, ( ) ..., ( ) ..., .11
- ..., ( ) 4, ( ) 9, ( ) 16, ( ) 25, ( ) ..., ( ) ..., ( ) ..., .12
- 6, ( ) 11, ( ) 21, ( ) 41, ( ) 81, ( ) 161, ( ) ..., ( ) ..., .13
- ..., ( ) 2, ( ) 18, ( ) 4, ( ) 15, ( ) 6, ( ) 12, ( ) ..., ( ) ..., .14
- ..., ( ) 8, ( ) 24, ( ) 12, ( ) ..., ( ) 18, ( ) 54, ( ) 27, ( ) ..., .15

### מבחן

בתרגילים 1-14 סדרות של מספרים.

בין כל איבר לאיבר יש סוגריים. רשום בתוכם את החוק המעביר אותך מאיבר מסוים לאיבר הבא אחריו. השלם את האיברים הנאים בסדרה.

**1.**  $4, ( ) 6, ( ) 9, ( ) 13, ( ) 18, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots$

**2.**  $19, ( ) 24, ( ) 29, ( ) 34, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots$

**3.**  $\dots, ( ) 6, ( ) 4, ( ) 2, ( ) 0, ( ) -2, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots$

**4.**  $0.1, ( ) 0.3, ( ) 0.5, ( ) 0.7, ( ) \dots, ( ) 1.1, ( ) \dots, ( ) \dots$

**5.**  $\dots, ( ) 3, ( ) 4, ( ) 6, ( ) 9, ( ) 13, ( ) 18, ( ) \dots, ( ) \dots$

**6.**  $17, ( ) 3, ( ) 23, ( ) 3, ( ) 29, ( ) 3, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots$

**7.**  $1, ( ) 3, ( ) 9, ( ) 27, ( ) 81, ( ) \dots, ( ) \dots$

**8.**  $-1, ( ) 2, ( ) -4, ( ) 8, ( ) -16, ( ) 32, ( ) \dots, ( ) \dots, ( ) \dots$

**9.**  $2, ( ) 1, ( ) 0.5, ( ) 0.25, ( ) 0.125, ( ) \dots, ( ) \dots$

**10.**  $\dots, ( ) 2, ( ) 5, ( ) 14, ( ) 41, ( ) 122, ( ) 365, ( ) \dots$

**11.**  $-1, ( ) -11, ( ) -20, ( ) -28, ( ) -35, ( ) -41, ( ) \dots, ( ) \dots$

**12.**  $1, ( ) 3, ( ) 4, ( ) 7, ( ) 11, ( ) 18, ( ) \dots, ( ) \dots$

**13.**  $2, ( ) 5, ( ) 10, ( ) 17, ( ) 26, ( ) 37, ( ) \dots, ( ) \dots$

**14.**  $10, ( ) 12, ( ) 14, ( ) 17, ( ) 20, ( ) 24, ( ) 28, ( ) \dots, ( ) \dots$

## \* סדרות ספרתיות - מציאת החסר בסדרה

### דוגמאות לסדרות ספרתיות בלבוש צורני

בכל אחת מן השאלות הבאות יש סדרה של צורות כזכור הגדרנו סדרה כקבוצת איברים המשתנים על-פי חוק מסוים, או המקיימים חוק מסוים. בתרגילי הדומינו, מתייחסים אל המונה כאל סדרה ספרתית, ואל המכנה כאל סדרה ספרתית. שתי הסדרות אינן חייבות להיות מאותו סוג. ? מציין מספר חסר. יש לרשום ליד סימן השאלה מהו המספר, בהתאם לחוק שמוצאים.

2	4	6	8	?
4	16	36	64	?

6	12	24	48	?
2	3	5	?	17

7	4	11	8	?
3	3	4	?	?

1. דומינו 1

בשורה העליונה סדרה חשבונית  
בשורה התחתונה - ריבועי המספרים  
שבשורה הראשונה.

2. דומינו 2

בשורה העליונה סדרה הנדסית  
בשורה התחתונה - ההפרשים  
מהווים סדרה חשבונית.

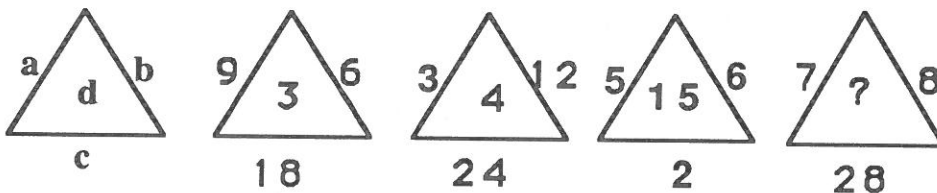
3. דומינו 3

בשורה העליונה ההפרשים לסרוגין  $-3, +7$   
בשורה התחתונה - ההפרשים לסרוגין  $0, +1$

4. בתרגיל זה כל צורה מורכבת ממספרים שיש ביניהם קשר מספרי. אם נסמן אותם ב-  $a, b, c$  יהיה החוק של הסדרה מנוסח באמצעות תבנית פסוק:  $a/2+b=c$

a		42		66		78	
b	c	6	27	7	40	8	?

5. תרגיל זה הוא דוגמה מצוינת לבעייתיות של חוקים אינדוקטיביים. אם נסמן כמו בציר השמאלי, נוכל לרשום תבנית פסוק שתתאים לצורות הראשונה והשנייה (משמאל):  $c-(a+b)=d$   
אבל חוק זה לא יחול על הצורה השלישית. לשלושת הצורות המלאות, החוק של הסדרה מנוסח באמצעות תבנית הפסוק:  $a*b/c=d$



\* התרגילים בגליון עבודה זה קשים



## \* סדרות ספרחיות - מציאת החסר בסדרה

בכל אחת מן השאלות הבאות יש סדרה של צורות המכילות המשתנים או מתנהגים לפי חוק מסוים (למשל, החוק יכול להיות מנוסח כתבנית מספר). מצא את החוק. מציין מספר חסר. רשום ליד סימן השאלה מהו המספר, בהתאם לחוק שמצאת.

1. דומינו 1

1	2	3	4	?
1	4	9	16	?

2. דומינו 2

6	12	24	48	?
2	4	16	?	?

3. דומינו 3

2	4	?	11	16
3	7	?	21	31

4. דומינו 4

8	5	12	9	?
3	10	7	?	?

5.

42		66		72	
6	12	11	11	8	?

6.

9	5	6	8	4	12	7	?	8
	3		5		2			

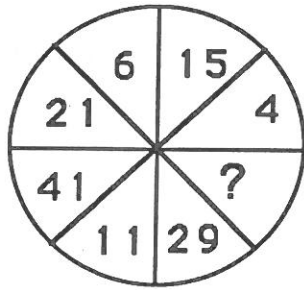
7.

7	19	4	9	?	3	5	28	8
	9		6		12			

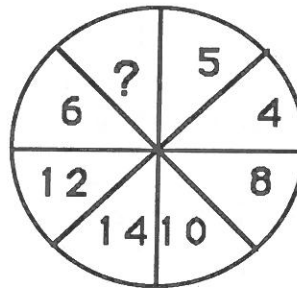
\* התרגילים בגליון עבודה זה קשים

**\* סדרות ספרותיות - מציאת החסר בסדרה**

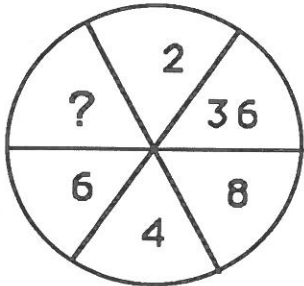
בכל אחת מן השאלות הבאות יש סדרה של צורות המכילות מספרים שמשתנים או מתנהגים לפי חוק מסוים. (למשל, בין המספרים הנגדיים יש קשר מסוים או שיש תבנית-פסוק המקשרת בין המספרים). מצא את החוק. **? מציין מספר חסר. רשום ליד סימן השאלה מהו המספר, בהתאם לחוק שמצאת.**



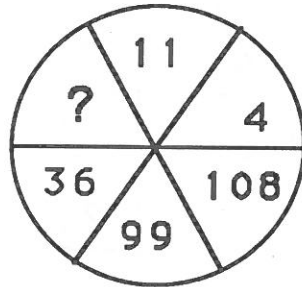
.2



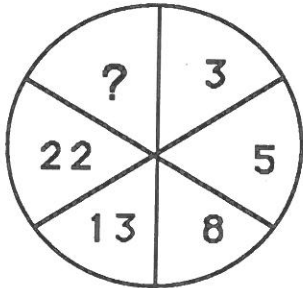
.1



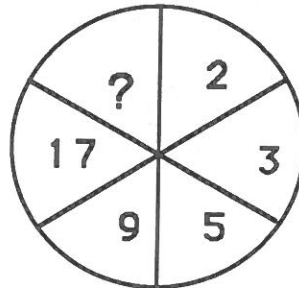
.4



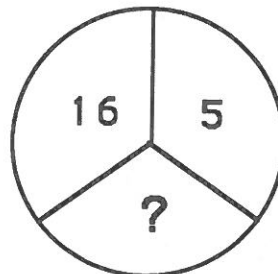
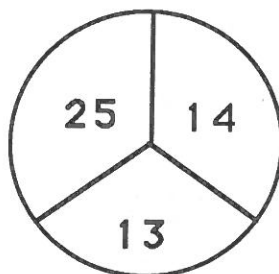
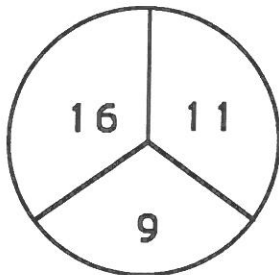
.3



.6



.5



.7

\* התרגילים בגליון עבודה זה קשים



## סדרות ספרתיות - מציאת איבר יוצא-דופן

בחידות בעמודים הבאים נתונות סדרות ספרתיות "מקולקלות".  
**נתונה** קבוצת פריטים מספריים המסודרים ברצף מסוים או על-פי כלל או עיקרון מסוים.  
 אל תוך הקבוצה השתרבב מספר אחד השונה מכל השאר- אינו מקיימת את הכלל, הרצף או החוקיות של הקבוצה. יש לבחור את המספר יוצא-הדופן, זה שאינו מהווה איבר בסדרה.  
 העיקרון בפתרון חידות אלה הוא מציאת הדמיון והשוני בין המספרים הנתונים.

רצוי לטפל בנושא הסדרות, המוסבר בדפים הקודמים, לפני שמטפלים בנושא מציאת יוצאי-הדופן.

כדי לבחור את המספר יוצא-הדופן יש:

1. להתבונן בסדרה ולאתר את ההיגיון שעל-פיו היא בנויה.
2. לנסח את הכלל, הקשר או העיקרון ולבדוק האם הכלל שנמצא חל על איברי הסדרה, מלבד האיבר יוצא-הדופן.
3. להפעיל את החוקיות ולמצוא בשיטת האלימינציה מהו המספר. ה"מקלקל את השורה".

החוק או העיקרון שעל-פיו בנויה הסדרה יכול להיות מבוסס על:

1. כל המספרים, לבד מאחד מהם, מהווים סדרה, שבין איבריה קיימת חוקיות מסוימת כגון: הפרש קבוע בין איברים עוקבים, מנה קבועה של איברים עוקבים, צירוף של שתי התכונות שזכרו, איבר מהווה סכום של איברים קודמים וכדו'.
2. כל המספרים, לבד מאחד, בעלי תכונה מתמטית מסוימת, כגון: כולם זוגיים או אי-זוגיים, כולם מתחלקים במספר כלשהו, כולם ראשוניים וכדו'.

הפריטים מופיעים בשורה, ויש למצוא את הפריט שאינו מקיים את החוקיות של השורה - בכל מקרה יש לנמק בקצרה את הסיבה לבחירת הפריט יוצא-הדופן.

היות שהחשיבה הנדרשת כאן היא **אינדוקטיבית** - מתוך המקרים שכבר ידועים לנו אנו מנסחים לעצמנו חוק, ועל-פיו מנסים לקבוע איזה פריט מקלקל את השורה - יש להזהר מאפשרות של קיום הכללה אחרת, שגם היא חלה על המקרים המעטים הידועים לנו.

בדפים הבאים יש דפי עבודה ולכל דף תמצא דף פתרון אפשרי בחוברת הפתרונויות.

## סדרות ספרתיות - מציאת יוצאי-הדופן

בכל אחת מן השורות הבאות יש מספר אחד יוצא-דופן ה"מקלקל את השורה", כלומר מפריע לחוקיות של הסדרה, ואם יוציאו אותו - תתקבל סדרה שהחוקיות בה ברורה. יש להקיף מספר זה.

דוגמה:

2      4      6      8      9

המספר 9 מקלקל את השורה, ויש להקיפו - אלמלא מספר זה הייתה לפנינו סדרה חשבונית שהפרש הקבוע בין איבריה הוא 2.

8	10	12	11	14	<u>.1</u>
25	20	15	12	10	<u>.2</u>
65	60	45	30	15	<u>.3</u>
3	4	6	9	12	<u>.4</u>
81	55	27	9	3	<u>.5</u>
8	15	18	22	29	<u>.6</u>
19	15	10	6	3	<u>.7</u>
36.8	18.4	9.2	6.9	4.6	<u>.8</u>
12.5	11.2	10.1	9.9	8.6	<u>.9</u>
48	12	8	4	2	<u>.10</u>
6561	3321	81	9	3	<u>.11</u>
2.75	1.75	1.5	1	0.5	<u>.12</u>
3	6	8	13	18	<u>.13</u>



## סדרות ספרתיות - מציאת יוצאי-הדופן

בכל אחת מן השורות הבאות יש מספר אחד יוצא-דופן ה"מקלקל את השורה", כלומר מפריע להשתייכות של שאר המספרים בשורה. הקף מספר זה.

דוגמה:

144 78 36 25 9  
המספר 78 מקלקל את השורה, ויש להקיפו - שאר המספרים הם מספרים ריבועיים (ריבועים של מספרים טבעיים).

837	612	342	549	422	<u>.1</u>
25	20	18	12	10	<u>.2</u>
7	6	5	3	17	<u>.3</u>
3	6	9	-12	15	<u>.4</u>
64	55	27	8	1	<u>.5</u>
144	197	256	361	1	<u>.6</u>
0.04	0.0121	0.01	0.11	0.01	<u>.7</u>
25	75	9	370	5	<u>.8</u>
738	112	3636	72	918	<u>.9</u>
38	123	6	72	9	<u>.10</u>
48	16	8	64	32	<u>.11</u>
48	1234	4596	20	32	<u>.12</u>

בכל אחת מן השורות הבאות יש חמש קבוצות של מספרים. קבוצה אחת יוצאת-דופן. כלומר, לארבע הקבוצות האחרות יש משהו משותף, או איזו חוקיות בתוכן, והקבוצה יוצאת-הדופן היא שונה. הקף קבוצה זו.

דוגמה:

1-2-3 24-25-26 7-9-14 2-3-4 25-20-30  
הקבוצה 25-20-30 מקלקלת את השורה, ויש להקיפה - בשאר הקבוצות המספרים מסודרים, משמאל לימין, בסדר גודל עולה. בקבוצה זו המספר האמצעי הוא הקטן ביותר.

5-2-7	1-4-6	1-4-5	1-2-3	4-10-14	<u>.13</u>
5-7-8	3-5-6	1-2-3	4-6-7	1-3-4	<u>.14</u>
125-521	73-37	85-58	10-11	48-84	<u>.15</u>
5-25	13-169	16-256	4-8	4-16	<u>.16</u>
2-20	7-70	5-50	1-100	4-40	<u>.17</u>

## תרגיל סיכום יצירתי

התלמידים יתחלקו לזוגות או לשלושות. כל תלמיד יחבר "מבחן" לחברו או לחבריו.

המבחן יכיל תרגילים מהסוג שהיכרנו עד עתה.

10 תרגילים שבהם יש להשלים את המספרים החסרים בסדרה, הסדרות יהיו מסוגים שונים.

שני תרגילים שבהם יש להשלים מספרים החסרים בתוך מבנה של צורות.

שני תרגילים שבהם יש למצוא מספר שהוא יוצא-דופן בין קבוצת מספרים,

שני תרגילים שבהם יש למצוא קבוצת מספרים שהיא יוצאת-דופן בתוך קבוצות של מספרים.